26/3/19

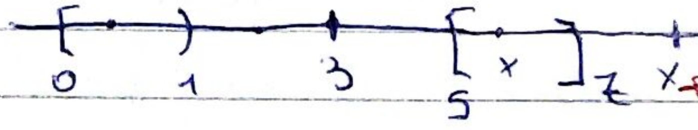
Ορισμός: Έστω (X,ρ) μ.χ., $A \subseteq X$. Αν $x \in A$ και το x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A το x λέγεται μεμονωμένο σημείο του A

Για $x \in A$: x μεμονωμένο σημείο του $A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \; B_\rho(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}$

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μ.χ και $A \subseteq X$. Το σύνορο του συνόλου A είναι το σύνολο: $bd(A) = \partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

Εφόσον $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$ έχουμε: $bd(A) = \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$

Παράδειγμα: 1) Στον $(\mathbb{R},\rho)$ όπου ρ η συνήθης μετρική. Θεωρούμε το σύνολο $A = [0,1) \cup \{3\} \cup [5,7]$



$x \to A^\circ = (0,1) \cup (5,7)$

Το 0 δεν ανήκει στο A γιατί το $(0-\varepsilon) \not\subset A$
Ομοίως για το $[5,7]$ γιατί $(5-\varepsilon, 7+\varepsilon) \not\subset A$
Το 3 δεν ανήκει στο A διότι $(3-\varepsilon, 3+\varepsilon) \not\subset A$

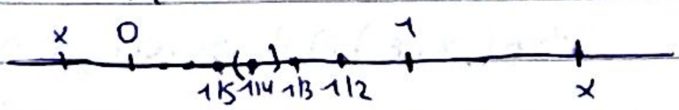
→ $\bar{A} = [0,1] \cup \{3\}$

→ $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ = \{0,1,3,5,7\}$

→ $A' = [0,1] \cup [5,7]$

2) $B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ $B^\circ, \bar{B}, \partial B, B'$?

Λύση:



→ $B^\circ = \emptyset$

→ $\bar{B} = B \cup \{0\}$ $\quad 0 \in B$ $\left(\text{διότι } \frac{1}{n} \to 0 \text{ και } \frac{1}{n} \in B \ \forall n \in \mathbb{N} \right)$

Αν $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$ για $\varepsilon = \min\left\{ x - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - x \right\}$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap B = \emptyset$

→ $B' = \{0\}$ $\left(0 \in B' \text{ διότι } \forall \varepsilon > 0 \ (-\varepsilon, \varepsilon) \cap B \setminus \{0\} \neq \emptyset \right.$
$\left. \text{διότι } \exists n \in \mathbb{N} \text{ με } \frac{1}{n} < \varepsilon \right)$

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} \notin B'$ διότι για $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon \right) \cap B = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$

Όλα τα σημεία του B είναι μεμονωμένα

→ $\partial B = \bar{B} \setminus B^\circ = B \cup \{0\}$

Φυλλάδιο 1

1) $X \neq \emptyset$, $f: X \to \mathbb{R}$, $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$

α) f: 1-1 $\Rightarrow \rho$ μετρική στο X

β) f: όχι 1-1 $\Rightarrow \rho$ δεν είναι μετρική στο X

Αποδ. α) i) $\forall x,y \in X$: $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| \geq 0$

ii) Για $x,y \in X$ $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0$ $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \overset{f: 1-1}{\Leftrightarrow} x = y$ ανιμμετρική

iii) $\forall x,y \in X$ $\rho(y,x) = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| = \rho(x,y)$ (αντισυμμετρική)

iv) $\forall x,y,z \in X$ $\rho(x,z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) - f(z) + f(y)| =$
$= |(f(x) - f(y)) + (f(y) - f(z))| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| =$
$= \rho(x,y) + \rho(y,z)$ Τριγωνική ανισότητα

Άρα ρ είναι μετρική στο X

β) Αν η f δεν είναι 1-1, υπάρχουν $x,y \in X$ με $x \neq y$ ώστε $f(x) = f(y)$. Τότε $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| = |0| = 0$.
Άρα η ρ δεν είναι μετρική

2) (X,ρ) μ.χ.

α) $d(x,y) = \sqrt{\rho(x,y)}$ είναι μετρική στο X

β) $\sigma(x,y) = (\rho(x,y))^2$

Αποδ. α) i) $d(x,y) = \sqrt{\rho(x,y)} \geq 0$

ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\rho(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(y,x) = \sqrt{\rho(y,x)} = \sqrt{\rho(x,y)} = d(x,y)$

iv) Τριγωνική ανισότητα: Έστω $x,y,z \in X$ Θα δ.ο
$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) + 2\sqrt{\rho(x,y)} \cdot \sqrt{\rho(y,z)}$
Εφόσον ρ μετρική ισχύει:

$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \leq \rho(x,y) + \rho(x,z) + \boxed{c}$

Επομένως, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ άρα ρ: μετρική

β) Αν (X,ρ) είναι ο $X=\mathbb{R}$ και ρ η συνήθης μετρική, τότε: $\sigma(0,1) = |1-0|^2 = 1$

$\sigma(1,2) = |2-1|^2 = 1$

$\sigma(0,2) = |2-0|^2 = 4$ δεν ισχύει $4 \leq 1+1$

δηλ. δεν ισχύει: $\sigma(0,2) \leq \sigma(0,1) + \sigma(1,2)$

άρα σ δεν είναι μετρική.

(4) Έστω $(X_i, \rho_i)_{i=1}^{k}$ μ.χ. $X = \prod_{i=1}^{k} X_i = X_1 \times \ldots \times X_k =$

$= \{(x_1, \ldots, x_k) : x_i \in X_i, i=1,\ldots,k\}$

$\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ $\rho((x_1,\ldots,x_k),(y_1,\ldots,y_k)) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i,y_i)$

α) ρ μετρική στο X

β) Αν $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο X, $\vec{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k)$ $n=1,2,\ldots$

$\vec{x} = (x^1, \ldots, x^k)$

$\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x} \Leftrightarrow x_n^i \xrightarrow{\rho_i} x^i$ $i=1,\ldots,k$

Λύση: Έστω $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$

$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ $\in X$

$\vec{z} = (z_1, \ldots, z_k)$

i) $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i,y_i) \geq 0$ (διότι $\rho_i(x_i,y_i) \geq 0$ $\forall i=1,\ldots,n$)

ii) $\rho(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i,y_i) = 0 \overset{\rho_i(x_i,y_i)\geq 0}{\Leftrightarrow} \rho_i(x_i,y_i) = 0$

$\overset{\rho_i \text{ μετρική}}{\Leftrightarrow} x_i = y_i, \ i=1,\ldots,n$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$

iii) $\rho(\vec{y}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i) = \rho(\vec{x}, \vec{y})$

iv) $\rho(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, z_i) \leq \sum_{i=1}^{k} (\rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, z_i)) =$

$= \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{k} \rho_i(y_i, z_i) = \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$

β) ($\Rightarrow$) Υποθέτω ότι $\vec{x_n} \xrightarrow{\rho} \vec{x}$. Έστω $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$

$0 \leq \rho(x_n^{i_0}, x^{i_0}) \leq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_n^i, x^i) = \rho(\vec{x_n}, \vec{x})$

$\downarrow$

0

Άρα από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχω: $\rho(x_n^{i_0}, x^{i_0}) \to 0$ δηλ. $x_n^{i_0} \xrightarrow{\rho} x^{\rho}$

($\Leftarrow$) Υποθέτω ότι $x_n^i \xrightarrow{\rho_i} x^i$, $i = 1, \ldots, k$ θα δ.ο. $\vec{x_n} \xrightarrow{\rho} \vec{x}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $i = 1, \ldots, k$ εφόσον $x_n^i \xrightarrow{\rho} x^i$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\rho_i(x_n^i, x^i) < \frac{\varepsilon}{k}$, $\forall n \geq n_i$

Θέτουμε: $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$

$\rho(\vec{x_n}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_n^i, x^i) < \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$

Επομένως $\vec{x_n} \xrightarrow{\rho} \vec{x}$

5) (X, ρ) μ.χ. $x, y \in X$ $(x_n), (y_n)$ ακολ. στο X $x_n \xrightarrow{\rho} x$, $y_n \xrightarrow{\rho} y$ Να δ.ο. $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$

Αποδ:

$0 \leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0$

Υπενθύμιση: $|\rho(a, b) - \rho(\gamma, \delta)| \leq \rho(a, \gamma) + \rho(b, \delta)$

Συμπεραίνουμε ότι: $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$

⑥ (X,ρ) μ.χ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ στο X, $x\in X$ ώστε $\rho(x_n,y_n) \to 0$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$. Να δ.ο. $y_n \xrightarrow{\rho} x$

Αποδ: $\rho(y_n,x) \le \rho(y_n,x_n) + \rho(x_n,x)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$

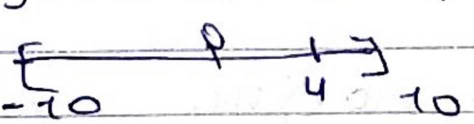
$$0 \le \rho(y_n,x) \le \rho(y_n,x_n) + \rho(x_n,x) = \rho(x_n,y_n) + \rho(x_n,x)$$

$i=1,\dots$

Άρα $\rho(y_n,x) \to 0$ δηλ $y_n \xrightarrow{\rho} x$

⑦ Να δοθεί παράδειγμα μ.χ (X,ρ) $x_1, x_2 \in X$ $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B_\rho(x_2,\varepsilon_2)$ να είναι γνήσιο υποσύνολο της ανοικτής μπάλας $B_\rho(x_1,\varepsilon_1)$

Αποδ: Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και Έστω $X=[-10,10]$ με ρ η σχετική μετρική από τη συνήθη μετρική (δηλ. $\rho(x,y)=|x-y|$ $\forall\, x,y\in[-10,10]$



$$B_\rho(0,11) = \{x\in[-10,10] : |x-0|<11\} = [-10,10]$$

$$B_\rho(4,12) = \{x\in[-10,10] : |x-4|<12\} = (-8,10]$$

Παρατηρούμε ότι $B_\rho(4,12)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $B_\rho(0,10)$